

Mjere varijacije ili disperzije

- Pokazuju odstupanja slučajne promjenljive X od njene aritmetičke sredine
- Aritmetička sredina – nedovoljna karakteristika skupa (rasporedi mogu imati isti prosjek a različitu disperziju)
- Ako je veća disperzija podataka oko prosjeka, tada su mjere varijacije veće u apsolutnom iznosu
- Podjela na apsolutne i relativne mjere

Apsolutne mjere varijacije

- **Iskazuju varijabilitet u apsolutnim iznosima**
- **Mogu biti pozicione ili izračunate**
- **Poziciona mjera disperzije:**
- **Razmak ili interval varijacije**
 - Razlika između najveće i najmanje vrijednosti
 - $I = X_{\max} - X_{\min}$

Interval varijacije

- Ima smisla samo za konačne skupove
- Na njega utiču samo krajnje vrijednosti obilježja
- Primjer 1.: Na mašini za proizvodnju okvira za naočare, u pet radnih dana, proizveden je škart od 5, 6, 8, 9 i 10 okvira. Izračunati interval varijacije.
- $I=10-5=5$
- **Odgovor:** Razlika između količine škarta okvira za naočare napravljenog petog i prvog dana iznosi 5 okvira.

Primjer 1-2 (3) Razmak i Interkvartilna razlika

<u>Sales</u>	<u>Sorted Sales</u>	<u>Rang</u>	
9	6	1	← Minimum
6	9	2	
12	10	3	
10	12	4	
13	13	5	
15	14	6	
16	14	7	
14	15	8	
14	16	9	
16	16	10	
17	16	11	
16	17	12	
24	17	13	
21	18	14	
22	18	15	
18	19	16	
19	20	17	
18	21	18	
20	22	19	
17	24	20	← Maksimum

Razmak
k

Maksimum - Minimum =
24 - 6 =
18

Izračunate mjere varijacije

□ **Varijansa**

– Prosjek kvadratnih odstupanja od aritmet. sredine

□ **Standardna devijacija**

– Kvadratni korjen iz varijanse

Varijansa

- Isključivo pozitivna veličina, $[0, +\infty)$
- Najviše korišćena u kvantitativnim disciplinama (statistika, ekonometrija)

Varijansa populacije

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Varijansa uzorka

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

Varijansa i Standardna devijacija – grupisani podaci

Varijansa populacije

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Varijansa uzorka

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$s^2 = \frac{\sum fx^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

Primjer 4.

- Na svih sedam fakulteta jednog univerziteta u bibliotekama postoji sledeći broj naslova stručne literature: 83, 510, 33, 256, 401, 47, 23. Da li je u pitanju uzorak ili populacija? Odrediti varijansu i standardnu devijaciju.

Rješenje

- Populacija!

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{83 + 510 + 33 + 256 + 401 + 47 + 23}{7} = 193,28$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2 = \frac{\sum (83^2 + 510^2 + \dots + 23^2)}{7} - 193,28^2 = 70828,58$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{70828,58} = 266,136$$

5. Varijansa i stand. devijacija

Poslednja cijena određene akcije u uzorku od 8 dana trgovanja na berzi bila je: 430,2 402,01 395,02 420 410 381 380,12 360. Ako je $\sum x^2 = 1266477$, standardna devijacija je:

• 523,7

$$\bar{x} = \frac{3178,35}{8} = 397,294$$

• **23,1**

• -2,6

$$s^2 = \frac{1266477 - 8(397,294)^2}{8-1} = 533,83$$

• 5,44

$$s = \sqrt{s^2} = 23,1$$

Relativne mjere disperzije

- Koeficijent varijacije
 - Procentualni odnos između standardne devijacije i prosjeka
 - Veći koef. varijacije – veća disperzija

$$V = \frac{\sigma}{\mu} 100$$

- Standardizovano (normalizovano) odstupanje

Standardizovano odstupanje

- Odstupanje bilo koje vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine izraženo u jedinicama standardne devijacije
- Pogodno za upoređivanje varijacija iz dvije ili više statističkih serija čija su obilježja izražena različitim jedinicama mjere
- Upotreba – statističko zaključivanje

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Primjer

- Data je raspodjela 12-mjesečnih stopa povraćaja za 30 akcija:

12-mjesečne stope povraćaja	Broj akcija
x	f
-0,1 do 0,0	3
0,0 do 0,1	5
0,1 do 0,2	6
0,2 do 0,3	10
0,3 do 0,4	6

Primjer

1. Kolika je varijacija stopa povraćaja mjerena standardnom varijacijom?
2. Kolika je varijacija stopa povraćaja mjerena koeficijentom varijacije?
3. Kolika je vrijednost medijane?
4. Kolika je modalna vrijednost?
5. Izračunati kumulativnu relativnu frekvenciju za procenat stopa povraćaja većih od 0,1?

1. Rješenje

stope	Broj akcija			
x	f	x	fx	fx ²
-0,1 do 0,0	3	-0,05	-0,15	0,0075
0,0 do 0,1	5	0,05	0,25	0,0125
0,1 do 0,2	6	0,15	0,9	0,135
0,2 do 0,3	10	0,25	2,5	0,625
0,3 do 0,4	6	0,35	2,1	0,735
Suma:	30		5,6	1,515

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{5,6}{30} = 0,1867 \quad \sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{N} - \mu^2 = \frac{1,515}{30} - 0,1867^2 = 0,0156$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,0156} = 0,125$$

2. Rješenje

$$V = \frac{\sigma}{\mu} 100 = \frac{0,125}{0,1867} 100 = 66,95\%$$

3. Rješenje

stope	Broj akcija	
x	f	fk
-0,1 do 0,0	3	3
0,0 do 0,1	5	8
0,1 do 0,2	6	14
0,2 do 0,3	10	24
0,3 do 0,4	6	30
Suma:	30	

$$M_e = L_1 + \frac{N - \sum f_1}{f_{Me}} i = 0,2 + \frac{30 - 14}{10} * 0,1 = 0,2 + 0,01 = 0,21$$

4. Rješenje

stope	Broj akcija	
x	f	fk
-0,1 do 0,0	3	3
0,0 do 0,1	5	8
0,1 do 0,2	6	14
0,2 do 0,3	10	24
0,3 do 0,4	6	30
Suma:	30	

$$M_o = L_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} i = 0,2 + \frac{10 - 6}{(10 - 6) + (10 - 6)} * 0,1 = 0,25$$

5. Populacija/uzorak

$$6/30+10/30+6/30=22/30=0,73=73\%$$

Zadatak 6

- Na slučajan način od 140 prodavnica mješovite robe izabrano je devet i popisan dnevni pazar u hiljadama eura: 4, 5, 6, 10, 14, 17, 21, 28 i 30. Izračunati varijansu, koeficijent varijacije i stand. odstupanje.

Rješenje

(x_i)	x_i^2
4	16
5	25
6	36
10	100
14	196
17	289
21	441
28	784
30	900
Ukupno:	2787

$$\bar{x} = \frac{135}{9} = 15$$

$$s^2 = \frac{2787 - 9(15)^2}{9 - 1} = 95,25$$

Rješenje

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{95,25} = 9,76$$

$$V = \frac{\sigma}{\mu} 100 = \frac{9,76}{15} 100 = 65,05\%$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{10 - 15}{9,76} = -0,512$$

Zadatak 9

- Mjesečni prosjek zaposlenih u jednom preduzeću iznosio je 2002. godine 60000 sa stand. devijacijom 250, a 2003. 4000 sa st. dev. 200. Da li je stabilnost zaposlenih bila veća 2002. ili 2003. godine?

$$\mu_{2002} = 60000$$

$$\sigma_{2002} = 250$$

$$\mu_{2003} = 4000$$

$$\sigma_{2003} = 200$$

Rješenje

- Koef. Varijacije! Ako je veći, pokazuje manju stabilnost (veću varijaciju) i obrnuto
- Dakle, stabilnost zaposlenih je bila veća 2002. godine!

$$V_{2002} = \frac{250}{60000} 100 = 0,416\%$$

$$V_{2003} = \frac{200}{4000} 100 = 5\%$$

10. Varijansa i stand. devijacija

Dati su podaci za svih 25 zaposlenih u jednoj firmi o vremenu provedenom putujući na posao (u minutima), gdje je $\sum fx = 535$ i $\sum fx^2 = 14825$. St. devijacija je:

- 19,14
- **11,62**
- 8,67
- 135,04